ಫ್ಯಾಗ್ನಾನೊ ಸಮಸ್ಯೆಯ

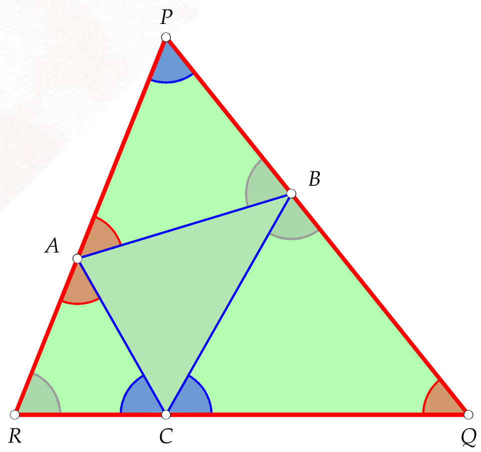
ಪರಿಶಿಷ್ಟ

ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

ಜೊತೆಗಿರುವ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಇದು: ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ $\triangle PQR$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಒಳಗೆ RP ಬದಿಯ ಮೇಲೆ A, PQ ಬದಿಯ ಮೇಲೆ B, ಮತ್ತು PQ ಬದಿಯ ಮೇಲೆ C ಶೃಂಗಗಳು ಬರುವಂತಿದ್ದು, ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಪರಿಧಿ ಇರುವಂತಹ ABC ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಲೇಖಕರು ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಾದ ಬಳಸಿ, ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಸಂರಚನೆಯಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನ ಸಾದೃಶ್ಯಗಳು ಅನ್ವಯವಾಗಲೇಬೇಕು ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ):

$$\triangle ARC \sim \triangle QBC \sim \triangle ABP \sim \triangle QRP,$$

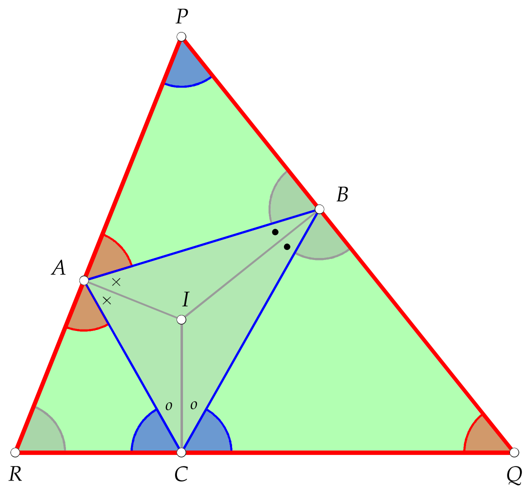
ತದನಂತರ, ಈ ನಿಯಮಗಳು A, B, C ಯನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಪಾದಗಳಾಗಲು ಒತ್ತಾಯಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ.

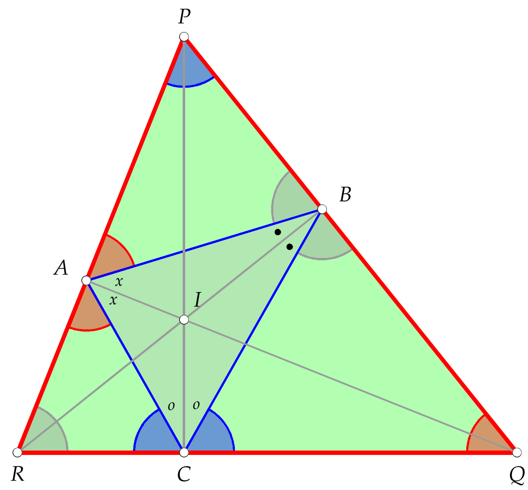


ಚಿತ್ರ 1. ಫ್ಯಾಗ್ನಾನೋರ ಸಮಸ್ಯೆ

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ತ್ರಿಕೋನವು ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿಧಿಸುವ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಸಹ ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ತ್ರಿಕೋನ, ಲಘು, ವಿಶಾಲ, ಲಂಬರೇಖೆ, ಕೋನ ಇಬ್ಭಾಗಕ, ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರ, ಬಹಿರ್ಕೇಂದ್ರ, ಒಗ್ಗೆರೆ.





ಚಿತ್ರ 2

ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯ ಸಾಧನೆ

$\triangle ABC$ ಯ ಕೋನಗಳ ಆಂತರಿಕ ಇಬ್ಭಾಗಕ (ಬೈಸೆಕ್ಟರ್) ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ. ಹೀಗೆ ನಿರ್ಮಿಸಲಾದ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳು $\triangle ABC$ ಯ ಅಂತರ್ಕೇಂದ್ರವಾದ I ಅಲ್ಲಿ ಸೇರುತ್ತದೆ; ಚಿತ್ರ 2(a) ನೋಡಿ.

ಸರಳವಾದ ಕೋನ ಗಣನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಮೂರು ಕೋನದ ಇಬ್ಭಾಗಕಗಳು $\triangle PQR$ ನ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಲಂಬವಾಗಿವೆ; ಎಂದರೆ, QR ಬದಿಯು $\triangle ACB$ ಯ ಕೋನ ಇಬ್ಭಾಗಕಕ್ಕೆ CI ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಮುಂತಾದವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು ಸುಲಭ. ಆದರೆ ಇದು $\triangle PQR$ ನ ಬದಿಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\triangle ABC$ ಯ ಕೋನಗಳ ಬಹಿರ್ ಇಬ್ಭಾಗಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ (ಅಂದರೆ QR ಬದಿಯು $\triangle ACB$ ಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ಬಹಿರ್ ಇಬ್ಭಾಗಕ ಮತ್ತು ಇತ್ಯಾದಿ). ತತ್ಫಲವಾಗಿ P, Q, R ಗಳು $\triangle ABC$ ಯ ಬಹಿರ್ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳು ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ P, Q, R ಗಳು $\angle ACB$, $\angle CAB$, $\angle ABC$ (ಅಂತರ) ಕೋನ ಇಬ್ಭಾಗಕಗಳ ಮೇಲೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, P, I, C ಬಿಂದುಗಳು ಒಗ್ಗೆರೆಯಲ್ಲಿದೆ, ಹಾಗೆಯೆ Q, I, A ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು R, I, B ಬಿಂದುಗಳು ಸಹ ಒಗ್ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಚಿತ್ರ 2(b) ನೋಡಿ.

ಇದರಿಂದ PC, QA ಮತ್ತು RB ಗಳು $\triangle PQR$ ಗೆ ಎತ್ತರಸೂಚಕಗಳು ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಸಾಧಿಸಲು ಹೊರಟಿದ್ದು. ■

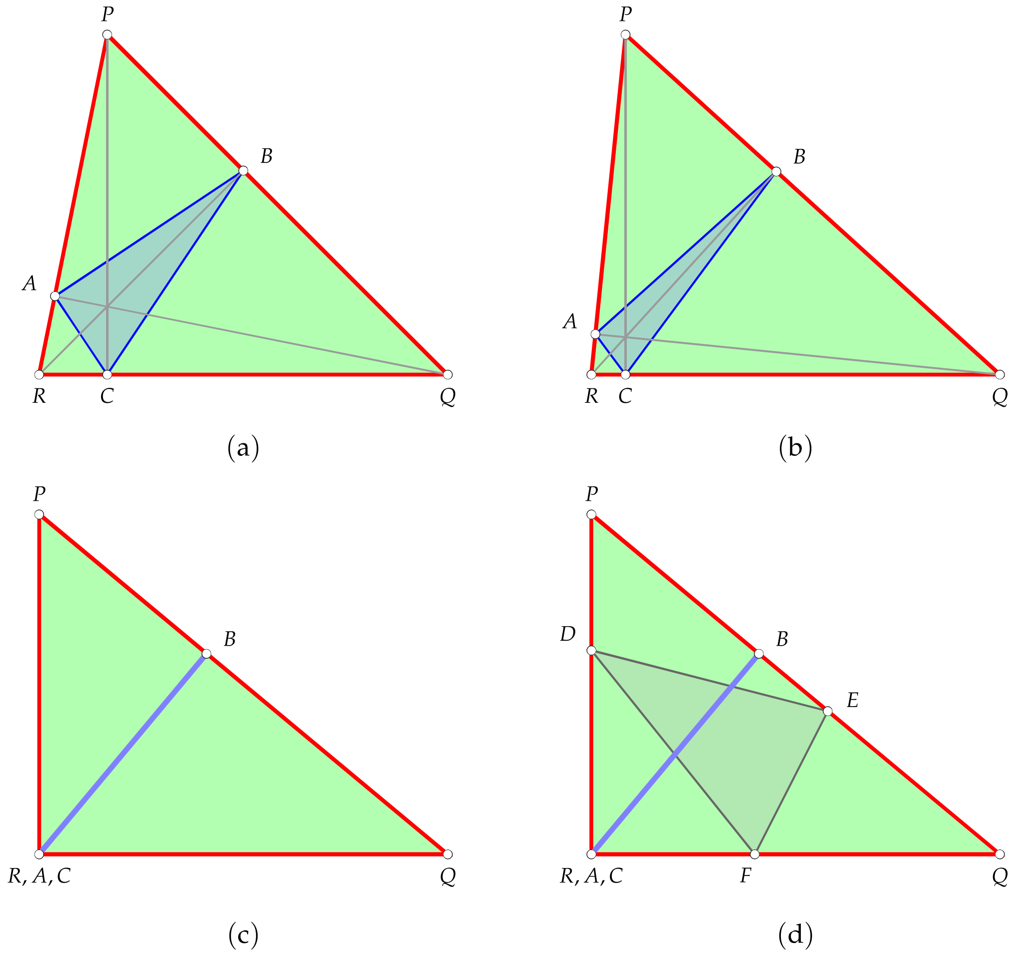
ತ್ರಿಕೋನವು ಏಕೆ ಲಘುಕೋನದ್ದಾಗಿರಬೇಕು?

$\triangle PQR$ ಲಘುಕೋನದ್ದಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನು ವಿಧಿಸುವ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತೇವೆ. $\triangle PQR$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಅಥವಾ ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರ್ಪಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಾವು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರಗಳು 3(a), 3(b) ಮತ್ತು 3(c) ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ R ಶೃಂಗದಲ್ಲಿನ ಕೋನವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಚಿತ್ರಗಳು 1 ಮತ್ತು 2 ರಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತಿವೆ

ಮತ್ತು ಮಿತಿಯಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಕೋನವು ಶೃಂಗ R ರಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 3(c)).

ಇಲ್ಲಿ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಗಮನಿಸಿ: $\angle R$ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದಂತೆ, A ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ನಿಕಟವಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಮಿತಿಯಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಕೋನವು ಶೃಂಗ R ರಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾದಾಗ, ಈ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು R ನೊಂದಿಗೆ ವಿಲೀನವಾಗುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಆದಾಗ, $\triangle ABC$ ಯು RB ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಕುಸಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂರಚನೆಯನ್ನು ಈಗ ಚಿತ್ರ 3(c) ನಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು $\triangle PQR$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಪರಿಧಿಯ ಅಂತರ್ದಾಖಲಾದ ತ್ರಿಕೋನವು ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.



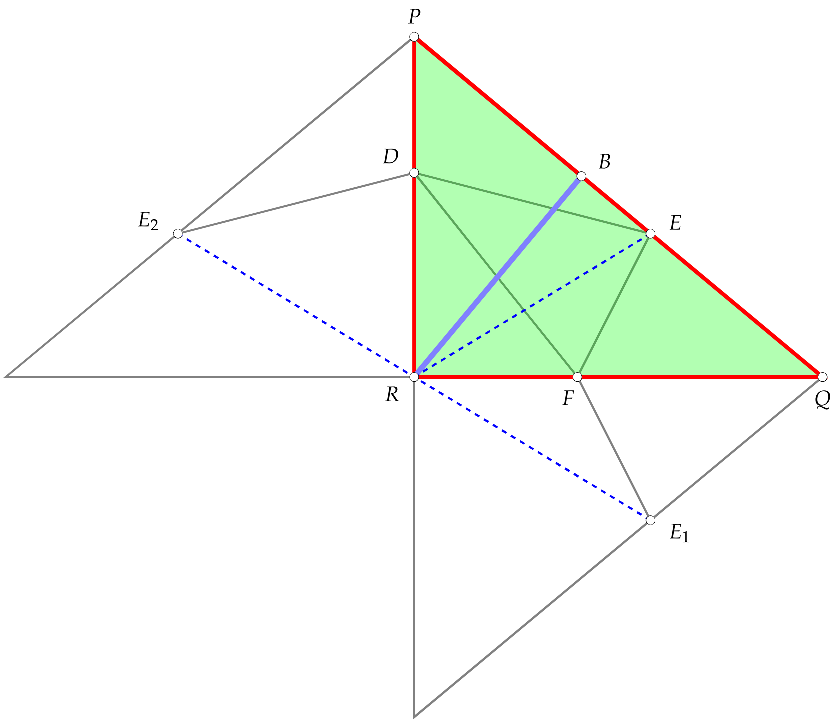
ಚಿತ್ರ 3

(ಮಿತಿಯ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ BR ಖಂಡವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ತಿದ್ದಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ; ಹಾಗೆಂದರೆ $\triangle ABC$ ಯ ಪರಿಧಿಯು BR ರೇಖಾಖಂಡದ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥ.)

$\triangle PQR$ ತ್ರಿಕೋನವು R ನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದ್ದು, $\triangle PQR$ ಒಳಗೆ $\triangle DEF$ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅದರ ಪರಿಧಿಯು RB ಯ ಎತ್ತರದ ಎರಡು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಉದ್ದ ಇರುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. DEF, ಚಿತ್ರ 3(d) ಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಒಳದಾಖಲಾದ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರಲಿ. ನಾವು ಈಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರದ ಮೇಲೆ ಕೈಗೊಳ್ಳೋಣ: ನಾವು ರೇಖೆ QR ಮತ್ತು PRಗಳಲ್ಲಿನ ಸಂರಚನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುತ್ತೇವೆ.ಇದರ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ; ಈ ಎರಡು ಮ್ಯಾಪಿಂಗ್‌ಗಳು ಬಿಂದು E ಅನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ E_1 ಮತ್ತು E_2 ಗೆ ಒಯ್ಯುತ್ತವೆ.

ನಾವು ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ:

- ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯ ನೈಜ ಸ್ವಭಾವದಿಂದ $E_1F = EF$ ಮತ್ತು $E_2D = ED$ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle DEF$ ಪರಿಧಿಯು E_1FDE_2 ನ ಪಥದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- $\angle ERE_1 = 2\angle ERQ$ ಮತ್ತು $\angle ERE_2 = 2\angle ERP$; ಆದ್ದರಿಂದ $\angle E_1RE_2 = 2\angle PRQ = 180^\circ$. ಅಂದರೆ, ಬಿಂದುಗಳಾದ E_1, R, E_2 ನೇರವಾದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.
- E_1FDE_2 ಪಥದ ಉದ್ದವು E_1E_2 ಖಂಡದ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ, i.e., $2 \times RE$ ಖಂಡದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ. (ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಬಾಹುಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಹಲವಾರು ಬಳಕೆಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.) ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle DEF$ ಪರಿಧಿಯು $\geq 2 \times RE$ ಖಂಡದ ಉದ್ದ.
- RE ಖಂಡದ ಉದ್ದವು RB ಖಂಡದ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವ ಸಮ. (ಏಕೆಂದರೆ RB ಯು PQ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ).



ಚಿತ್ರ 4

- ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle DEF$ ಪರಿಧಿಯು $\geq 2 \times RB$ ಖಂಡದ ಉದ್ದ.

ಆದ್ದರಿಂದ: ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ಅಂತರ್ದಾಖಲಾದ ತ್ರಿಕೋನವು (ಕನಿಷ್ಠ ಪರಿಧಿ ಎಂಬ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ "ಅತ್ಯುತ್ತಮ" ಪದವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ) ಎರಡು ಬಾರಿ ತಿದ್ದಲಾದ RB ಖಂಡವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕುಸಿದ ತ್ರಿಕೋನ. ■

ನಾವು $\angle PQR$ ನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ನಮಗೆ ಶೃಂಗ R ನಲ್ಲಿ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ಅಂತರ್‌ದಾಖಲಾದ ತ್ರಿಕೋನ ಯಾವುದು? ನಾವು ಎರಡು ಬಾರಿ ತಿದ್ದಲಾದ RB ಖಂಡವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಕುಸಿದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದಲ್ಲದೆ ಬೇರೇನೂ ಉತ್ತಮ ಮಾರ್ಗವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರುತ್ತದೆ (ಇಲ್ಲಿ, B ಬಿಂದುವು ಶೃಂಗ R ನಿಂದ PQ ಬದಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಪಾದ). ನಾವು ಹೇಳಿಕೆಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಮರ್ಥನೆಯ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನೀವೇ ಪೂರೈಸಲೆಂದು ಬಿಡುತ್ತೇವೆ. (ಸುಳಿವು: ಮೇಲೆ ಬಳಸಿದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ಕಲ್ಪನೆಯು ಇಲ್ಲೂ ಸಹ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ.) ■



ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿಯವರು ಪುಣೆಯ ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆ (ಕೆಎಫ್‌ಐ) ನ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಮತ್ತು ಪ್ರಾಂಶುಪಾಲರಾಗಿ ಮತ್ತು ರಿಷಿವ್ಯಾಲಿ ಸ್ಕೂಲ್ (ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶ) ನ ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಭಾರತದ ಮ್ಯಾಥ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್ ಮೂಮೆಂಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ತೊಡಗಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಹಲವಾರು ಗಣಿತದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಶ್ರೀಯುತರು *ಅಟ್ ರೈಟ್ ಆ್ಯಂಗಲ್ಸ್* ಪತ್ರಿಕೆಯ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಇಮೇಲ್ ವಿಳಾಸ: shailesh.shirali@gmail.com.

ಅನುವಾದ : ಸಹನಾ ರಾವ್